Diese Lösung von (2) konnte in allen drei oben angegebenen Fällen experimentell genau verifiziert werden. Abb. 2 gibt die graphische Darstellung der Schwebungsamplituden. Man sieht, daß für das Maximum von y_m bzw. z_m wohl x_m und z_m bzw. x_m und $y_m = 0$ ist, daß dann also die ganze Energie in der y- bzw. z-Schwingung steckt, daß aber für das Maximum von x_m weder y_m noch $z_m = 0$ ist.

Im Fall 1 pendelt die Energie von der Vertikal- über die Drehschwingung zur Pendelschwingung (Abb. 3 a) und weiter über die Drehschwingung zur Vertikalschwingung. Im Fall 2 pendelt die Energie zwischen Dreh- und Pendelschwingung über die Vertikalschwingung (Abb. 3 b). Im Fall 3 pendelt die Energie zwischen Vertikal- und Drehschwingung über die Pendelschwingung (Abb. 3 c).

Über weitere Resonanzschwingungen, die dem Gleichungssystem (1) entsprechen, hoffe ich später berichten zu können, insbesondere über den Fall des völligen zyklischen Energieaustausches zwischen den drei Schwingungsarten und die dafür notwendigen Bedingungen.

Bemerkungen zur Schwingungstheorie dünner elastischer Platten[1]

Von Fritz Sauter[2]

(Z. Naturforschg. **3 a**, 548—552 [1948]; eingegangen am 30. Juli 1948)

Der natürlichste Weg zum Verständnis der Schwingungsvorgänge bei dünnen Platten, nämlich der über die strengen Lösungen der elastischen Grundgleichungen, ist bisher in der Literatur wenig beachtet worden. Diese strenge Integration ergibt für Platten endlicher Dicke bei vorgegebener Laufgeschwindigkeit c der Wellen parallel zur Platte (= Schnittgeschwindigkeit) ein diskretes Spektrum zugehöriger Schwingungsfrequenzen. Seine Diskussion führt im Grenzfall dünner Platten zu drei bestimmten Dispersionsgesetzen für die drei verschiedenen Schwingungstypen (Scherungs-, Dehnungs- und Biegungsschwingungen), aus denen man leicht die für diesen Grenzfall vereinfachten Schwingungsgleichungen sowohl in erster wie auch in höherer Näherung gewinnen kann. Im besonderen wird so anschaulich verständlich, warum die Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen dünner Platten von vierter Ordnung in den Raumableitungen ist.

Der begrifflich einfachste, wenn auch rechentechnisch nicht gerade kürzeste Weg zur Ableitung der Schwingungsgleichungen für elastische Körper, die in einer oder zwei Dimensionen „dünn" sind (wie die Platten, Schalen, Stäbe), führt über die strenge Integration der elastischen Grundgleichungen für Körper mit endlichen Dimensionen und die nachträgliche Entwicklung der Lösungen nach irgendwelchen kleinen Größen. Im besonderen kann man auf diese Weise leicht auch die höheren Näherungen für die vereinfachten Schwingungsgleichungen gewinnen, denen diese dünnen Gebilde gehorchen müssen. Dies soll hier am Beispiel der Schwingungen einer planparallelen Platte gezeigt werden. Denn es erscheint jetzt, wo sich die technische Mechanik in steigendem Maße für dynamische Vorgänge in Platten und Stäben zu interessieren beginnt, nicht abwegig, erneut das Augenmerk auf diese wenn auch wohl nicht neue, so doch viel zu wenig beachtete Methode zu lenken. Es kommt noch dazu, daß dieses Verfahren nebenbei eine anschauliche Begründung liefert für die bekannte Tatsache, daß die Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen von Platten, wie auch für die von Schalen und Stäben, hinsichtlich der Ableitungen nach den Raumkoordinaten von vierter Ordnung ist, im Gegensatz zu den elastischen Grundgleichungen und auch zu den Differentialgleichungen für die Dehnungs-, Scherungs- und Torsionsschwingungen, die in den Raum- und Zeitableitungen homogen von zweiter Ordnung sind.

Es möge also im folgenden eine planparallele Platte der Dicke $2h$ betrachtet und deren Mittelebene zur x, y-Ebene eines Koordinatensystems

[1] Hrn. Geheimrat Prof. Dr. A. Sommerfeld zur Erinnerung an seine Tätigkeit als technischer Mechaniker vor rund einem halben Jahrhundert zum 5. Dez. 1948 ehrfurchtsvoll gewidmet.

[2] Weil a. Rhein, Kanderstr. 45.

gewählt werden, so daß $|z| < h$ ist[3]. Ferner mögen zur Vereinfachung nur solche Schwingungszustände behandelt werden, die nicht von y abhängen, die also allgemein durch Ausdrücke der Form

$$f(x, y, z, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\, d\omega\, a_{\varkappa,\omega}(z) \cdot e^{i\varkappa x - i\omega t} \qquad (1)$$

beschrieben werden können. Dann bestimmen sich die Funktionen $a_{\varkappa,\omega}(z)$ aus den elastischen Schwingungsgleichungen und den Randbedingungen, wobei letztere zu Beziehungen zwischen zusammengehörigen Werten von $\varkappa$ und ω führen. Daher ist das eine der beiden Integrale in (1) entweder durch eine Summe zu ersetzen oder kann als Umlaufintegral um bestimmte Pole in der komplexen Ebene geschrieben werden, deren Residuen dann genau die einzelnen Summanden liefern.

Dieser Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und ω ist nun für die einzelnen Schwingungstypen verschieden. Am einfachsten ist er für die reinen Transversalschwingungen mit der Scherung parallel zur y-Achse. Er lautet hier

$$\omega^2 = c_t^2 \left[\varkappa^2 + \left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2\right] \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2 \ldots. \qquad (2)$$

Dabei bedeutet c_t die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen in ausgedehnten Medien; sie ist, wie die später benutzte Geschwindigkeit c_l von Longitudinalwellen, mit den elastischen Konstanten E (Elastizitätsmodul) und μ (Poissonsche Querkontraktionszahl) sowie mit der Materialdichte ϱ verknüpft durch die Beziehungen

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}, \qquad c_t = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1}{2(1+\mu)}}. \qquad (3)$$

Die ganze Zahl n in (2) gibt die Anzahl der zur Mittelebene parallelen Knotenebenen des Verschiebungsvektors an. Man erkennt, daß die Grundschwingung $n = 0$ unabhängig von der Plattendicke eine konstante Laufgeschwindigkeit $c = c_t$ besitzt, wobei c allgemein definiert wird durch

$$c = \omega / \varkappa. \qquad (4)$$

Für $n > 0$ erhält man eine typische Dispersionserscheinung, indem die Phasengeschwindigkeit c (= Schnittgeschwindigkeit der mit der Geschwindigkeit c_t unter dem Neigungswinkel $\arcsin c_t/c$ gegen die Plattenebene laufenden Wellen) gegeben wird durch

$$c = \frac{c_t}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_t}{2h\omega}\right)^2}} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{n\pi c_t}{2h} \frac{c}{\sqrt{c^2 - c_t^2}}. \qquad (5)$$

In einem c-ωh-Diagramm stellt sich dieser Zusammenhang je nach dem Wert von n durch Kurvenzüge dar, welche bei $c = c_t$ aus dem Unendlichen kommen und als hyperbelähnliche Kurven mit horizontaler Asymptote in der Höhe $\omega h = n\pi c_t/2$ bei $c \to \infty$ nach Unendlich laufen. Unterhalb $\omega h = \pi c_t/2$ findet man nur den einen Ast $c = c_t$ der Kurvenschar. Ersichtlich bleibt dieser Hauptast, d. h. die knotenfreie Grundschwingung, allein übrig, wenn man bei endlichen ω zur Grenze $h \to 0$ übergeht. Da hier mithin stets

$$\omega = c_t \varkappa \qquad (6)$$

gilt, genügt die Größe f nach (1), spezialisiert auf die Mittelebene $z = 0$ und gleichgesetzt der Komponente s_y des Verschiebungsvektors, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2}, \qquad (7)$$

entsprechend der bekannten Gleichung für Scherungswellen dünner Platten. Sie gilt sogar streng, sofern nicht im Schwingungsspektrum Frequenzen $\omega > \pi c_t / 2h$ auftreten bzw. Wellenlängen λ, die kleiner sind als $4h$.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse bei den Dehnungs- und Biegungsschwingungen. Erstere ergeben sich aus den zur Mittelebene symmetrischen Lösungen der elastischen Gleichungen für $s_y = 0$ und führen zur Frequenzbedingung

$$\frac{\operatorname{tg} h\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - \varkappa^2}}{\operatorname{tg} h\sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - \varkappa^2}} = -\frac{\left(\frac{\omega^2}{2c_t^2} - \varkappa^2\right)^2}{\varkappa^2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - \varkappa^2}\sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - \varkappa^2}}. \qquad (8)$$

[3] Lord Rayleigh, Proc. Math. Soc. London **20**, 225 [1898]; H. Lamb, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **93**, 114 [1916/17]; vgl. dazu auch F. Pfeiffer im Handbuch der Physik, Bd. 6, 324—328 [1928].

Letztere besitzen schiefsymmetrische Verschiebungskomponenten und die Frequenzbedingung

$$\frac{\operatorname{tg} h\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_t^2}-\varkappa^2}}{\operatorname{tg} h\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_l^2}-\varkappa^2}} = -\frac{\left(\dfrac{\omega^2}{2\,c_t^2}-\varkappa^2\right)^2}{\varkappa^2\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_l^2}-\varkappa^2}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c_t^2}-\varkappa^2}}. \tag{9}$$

In einem c-ωh-Diagramm stellen diese beiden Gleichungen eine Schar von unendlich vielen Kurven dar, die mit Ausnahme je eines Hauptastes, charakterisiert durch $n=0$, wie im Fall der Scherungsschwingungen, bei $c=c_t$ aus dem Unendlichen kommen, hyperbelähnlich, wenn auch nicht durchweg monoton, abfallen und sich schließlich für große c-Werte (d. h. $\omega \gg c_t\varkappa$) den durch (2) bzw. durch

$$\omega^2 = c_l^2\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\,\pi}{2\,h}\right)^2\right) \tag{10}$$

gegebenen Kurven asymptotisch nähern. Und zwar gehören zu den symmetrischen Schwingungen nach (8) die geraden n-Werte in (10) und die ungeraden in (2), während zu den antisymmetrischen die umgekehrten Werte gehören.

Auf diesen Teil $n>0$ des Frequenz-Geschwindigkeitsspektrums sei hier besonders hingewiesen, da er in der einschlägigen Literatur bisher anscheinend nicht genügend beachtet wurde. Vielmehr stehen überall die beiden Hauptäste mit $n=0$ im Vordergrund des Interesses. Doch benötigt man bei der Fourier-mäßigen Verfolgung rasch veränderlicher Vorgänge in Platten, wie etwa von Stoßwellen, sicher auch die zu $n>0$ gehörigen Schwingungstypen.

Dabei tritt allerdings u. a. folgende begriffliche Schwierigkeit auf: Es besteht kein Zweifel, daß sich der Wellenkopf einer Druckstoßwelle auch in einer dünnen Platte mit der Geschwindigkeit c_l fortpflanzt, während Schubstoßwellen mit der Geschwindigkeit c_t laufen. Denn Materieelemente im Platteninneren, die von einem der beiden Stoßwellenköpfe getroffen werden, „wissen" ja im ersten Moment noch nichts von der Existenz der Begrenzungsflächen und geben daher zunächst die Kompression bzw. die Scherung so weiter, wie sie es auch in ausgedehnten Medien tun würden.

Dies ist bei Fourier-mäßiger Darstellung der Stoßwelle im Falle des Schubstoßes qualitativ verständlich, da ja die oben beschriebenen Dispersionskurven für $n>0$ bei $c=c_t$ ins Unendliche laufen und sich daher in der Nähe dieser Geschwindigkeit häufen. Unverständlich erscheint jedoch bei dieser Darstellung vorerst die Laufgeschwindigkeit c_l des Druckstoßes. Denn in den Dispersionskurven ist dieser Wert $c=c_l$ nicht irgendwie auffällig gekennzeichnet, vielmehr laufen hier die Kurven glatt durch. Nun kann man zwar eine Besonderheit des Wertes $c=c_l$ feststellen, wenn man die Gruppengeschwindigkeit $v=d\omega/d\varkappa$ berechnet. Denn während dieser Wert im allgemeinen noch vom Parameter n der betrachteten Kurve, längs welcher differenziert wird, abhängt, wird er für $c=c_l$ unabhängig von n und nimmt hier nach (8) und (3) den Wert

$$v = c_l\,\frac{\left(\dfrac{c_l^2}{c_t^2}-2\right)^2+8\left(\dfrac{c_l^2}{c_t^2}-1\right)}{\dfrac{c_l^2}{c_t^2}\left(\dfrac{c_l^2}{c_t^2}-2\right)^2+8\left(\dfrac{c_l^2}{c_t^2}-1\right)} \tag{11}$$

$$= c_l\left(1-\frac{\mu^2/2}{(1-2\,\mu)^2+\mu^2(1-\mu)}\right)$$

an. Da aber $v<c_l$ für $\mu>0$ ist, kann auch die Gruppengeschwindigkeit für das Zustandekommen der Druckstoßgeschwindigkeit c_l in dieser Weise nicht verantwortlich gemacht werden.

Nun zu den Hauptästen $n=0$ der beiden Kurvenscharen! Beide laufen für große ωh-Werte, d. h. also auch für sehr dicke Platten (bei endlichem ω), nach oben asymptotisch an die Gerade $c=c_R$ heran, wobei c_R die bekannte Laufgeschwindigkeit der Rayleighschen Oberflächenwellen bedeutet, ein für dicke Platten unmittelbar verständliches Resultat.

Gegen kleinere ωh-Werte hin weicht der Hauptast der symmetrischen Lösung von der Asymptote $c=c_R$ nach höheren c-Werten ab und trifft schließlich auf die c-Achse senkrecht auf, und zwar bei einem c-Wert

$$c = c_{Pl} = \frac{2\,c_t}{c_l}\sqrt{c_l^2-c_t^2} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}\,\frac{1}{1-\mu^2}}\,. \tag{12}$$

Dieser Wert ist als die Laufgeschwindigkeit von Dehnungswellen in dünnen Platten bekannt. Da also auf dem Hauptast für dünne Platten in erster Näherung

$$\omega = c_{Pl}\,\varkappa \tag{13}$$

wird, gilt für die Dehnungsschwingungen, charakterisiert beispielsweise durch s_x für $z=0$, die normale Wellengleichung der Form (7), nur mit c_{Pl} anstatt c_t.

Anders bei der antisymmetrischen Lösung! Hier weicht der Hauptast von der Asymptote bei $c=c_R$ gegen kleinere c-Werte hin ab und läuft schließlich mit der c-Achse als Tangente in den Nullpunkt ein. Und zwar leitet man aus (9) für diesen Grenzfall das Dispersionsgesetz

$$\omega = \frac{\varkappa^2 h\, c_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{3}} = \frac{c^2 \sqrt{3}}{h\, c_{\mathrm{Pl}}} \tag{14}$$

ab, mit dem durch (12) definierten Wert für c_{Pl}. Will man hier zu einer Differentialgleichung etwa für $(s_z)_{z=0}$ kommen, so muß man wegen der Gestalt (1) dieser Funktion das ω im Dispersionsgesetz durch den Differentialquotienten $i\,\partial/\partial t$ und das $\varkappa$ durch $-i\,\partial/\partial x$ ersetzen. Man würde so zur Gleichung

$$i\,\frac{\partial s_z}{\partial t} = -\frac{h\, c_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{3}}\,\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \tag{15}$$

kommen, welche ebenso wie die Schrödinger-Gleichung die imaginäre Einheit i enthält. Man kann letztere aber, da sie in einer Differentialgleichung der klassischen Physik als störend empfunden wird, durch Iteration eliminieren und kommt so zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = -\frac{h^2 c_{\mathrm{Pl}}^2}{3}\,\frac{\partial^4 s_z}{\partial x^4}, \tag{16}$$

welche mit der bekannten Schwingungsgleichung für die Biegungsschwingungen übereinstimmt.

Somit kann man das Auftreten des vierten räumlichen Differentialquotienten als die unmittelbare Folge des durch (14) gegebenen Dispersionsgesetzes ansprechen. Dies kommt vielleicht noch deutlicher zum Ausdruck, wenn man von der gewöhnlichen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} \tag{17}$$

ausgeht und hier für c den aus (14) folgenden Wert

$$c = \frac{\varkappa\, h\, c_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{3}} \tag{18}$$

einsetzt. Dann tritt rechts in (16) der Integrationsparameter $\varkappa$ auf, den man wegen (1), wie oben, durch den Operator $-i\,\partial/\partial x$ ersetzen kann. Man kommt dann unmittelbar zur Gl. (15).

Will man noch das Zustandekommen des Dispersionsgesetzes (14) qualitativ ohne die zu (9) führende Integration verstehen, so kann man auf die elastischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}
\varrho\,\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z},\\
\varrho\,\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z},\\
\varrho\,\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{19}$$

zurückgreifen, in denen die σ_{ik} $(=\sigma_{ki})$ die gewöhnlichen Spannungskomponenten bedeuten. Dazu treten noch 6 Gleichungen als Ausdruck des Hookeschen Gesetzes, welche eine lineare Verknüpfung zwischen diesen Spannungskomponenten und den Komponenten des Verzerrungstensors, d. h. den räumlichen Ableitungen des Verschiebungsvektors, darstellen.

Für eine dünne Platte mit kräftefreier Oberfläche gilt an letzterer $\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0$. Nimmt man diese Beziehung in erster Näherung über den ganzen Querschnitt hinweg als gültig an, so bleiben auf der rechten Seite von (19) nur die Spannungskomponenten links oberhalb des gestrichelten Kreuzes (19) übrig. Rechnet man nun für die Komponenten des Verschiebungsvektors mit Ansätzen der Form (1), so werden die σ_{ik} wegen des Hookeschen Gesetzes proportional zu $\varkappa$, die Ausdrücke in den ersten beiden Zeilen von (19) somit proportional zu $\varkappa^2$. Da andererseits die Ausdrücke auf der linken Seite von (19) proportional zu ω^2 sind, führen die ersten beiden Gleichungen (19) für s_x und s_y in der zunächst betrachteten ersten Näherung zu einem linearen Zusammenhang der Form (6) bzw. (13), während die dritte Gleichung für die Biegungskomponente s_z in gleicher Näherung zu $\omega=0$ führt. Das Auftreten von Biegungsschwingungen endlicher Frequenz hängt somit wesentlich mit der Inkonstanz der Spannungsgrößen σ_{xz}, σ_{yz} und σ_{zz} über den Querschnitt hinweg zusammen. Und zwar werden bei dieser Art von Schwingungen, wie eine genauere Betrachtung zeigt, σ_{xz} und σ_{yz} gerade Funktionen von z, von denen man bei einer Potenzreihenentwicklung nach z auch noch die in z quadratischen Glieder berücksichtigen muß, während σ_{zz} in z unsymmetrisch wird und mindestens bis zum Glied dritter Ordnung angegeben werden muß. Als Folge davon wird die rechte Seite der letzten Gleichung (19) proportional zu $\varkappa^4$, so daß schließlich ω^2 proportional $\varkappa^4$ werden muß, entsprechend dem Dispersionsgesetz (14).

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß man aus (19) analoge Schlüsse auch auf die Biegungsschwingungen von dünnen Stäben ziehen kann. Läßt man die z-Achse mit der Stab-Achse zusammenfallen, so müssen wegen der Spannungsfreiheit der

Oberfläche in erster Näherung alle Spannungskomponenten mit Ausnahme von σ_{zz} verschwinden, so daß in dieser Näherung auf der rechten Seite von (19) nur das eine Glied rechts unten übrig bleibt. Dieses liefert, wie bei der Platte, die Dehnungsschwingungen mit einem Dispersionsgesetz

$$\omega = c_{st}\,\varkappa \quad \text{mit} \quad c_{st} = c_t \sqrt{\frac{3\,c_l^2 - 4\,c_t^2}{c_l^2 - c_t^2}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \tag{20}$$

während man die Biegungsschwingungen auch hier erst in nächster Näherung erhält, mit einem Dispersionsgesetz $\omega \sim \varkappa^2$.

Was schließlich noch die nächste Näherung der Schwingungsgleichungen für dünne Platten betrifft, so hat man nur die nächste Näherung der Bedingungsgleichungen (8) und (9) für die beiden Hauptäste zu ermitteln und dann die in der Dispersionsformel stehenden Größen ω bzw. $\varkappa$ durch die Operatoren $i\,\partial/\partial t$ bzw. $-i\,\partial/\partial x$ zu ersetzen. Da aus (8) in nächster Näherung

$$\omega^2 = \varkappa^2\,c_{\mathrm{Pl}}^2\left(1 - \frac{\varkappa^2 h^2}{3}\left(\frac{c_l^2 - 2\,c_t^2}{c_l^2}\right)^2 + \dots\right) \tag{21}$$

an Stelle von (13) mit (12) folgt, und da ebenso aus (9)

$$\omega^2 = \frac{\varkappa^4 h^2}{3}\,c_{\mathrm{Pl}}^2\left(1 - \frac{\varkappa^2 h^2}{15}\,\frac{27\,c_l^2 - 20\,c_t^2}{c_l^2} + \dots\right) \tag{22}$$

an Stelle von (14) wirksam wird, erhält man in dieser nächsten Näherung für die Dehnungsschwingungen eine Differentialgleichung, die in den räumlichen Ableitungen von vierter Ordnung ist, und für die Biegungsschwingungen eine Gleichung mit den sechsten räumlichen Ableitungen. Dabei bleiben die Zeitableitungen nach wie vor von zweiter Ordnung.

The earth's constants from combined electric and magnetic measurements partly in the vicinity of the emitter

By Karel Frederik Niessen[1]

Aus den Philips Research Laboratories N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken Eindhoven, Holland

(Z. Naturforschg. **3a**, 552—558 [1948]; eingegangen am 17. August 1948)

In this article a way is indicated for the determination of the soils constants, based upon measurements of both the electric and the magnetic field (remote from but also in the vicinity of the emitter). The method is based especially upon the different behaviour of the electric and magnetic field as a function of the distance in the vicinity of the emitter. Owing to this difference and its mathematical form it will be possible to derive the required constants of the earth by means of *one simple system of curves, which may be used again in every other case, as the curves do not depend upon the distances of the points of observation from the emitter.* This greatly simplifies the solution of the problem.

§ 1. The field on the earth at a distance from the emitter of the order of a few wavelengths

The dielectric constant ε and the conductance σ of the earth have sometimes been derived from measurements of the fieldstrength at great distances from the emitter. In that case mostly long waves were considered where the conduction currents in the earth prevailed over the displacement currents.

We shall now investigate the possibility of arriving at the same result from measurements of the fieldstrength, partly made in the vicinity of, partly at greater distances from the emitter, and even without assuming the conduction current to be great with respect to the displacement current.

With "vicinity of the emitter" we here mean distances r, measured along the surface of the earth and of the order of two to four wavelengths:

$$2\,\lambda < r < 4\,\lambda\,.$$

We assume that even at these short distances the emitter may be considered as a vertical mathematical dipole, situated close to the ground.

This will not be the case for the real emitter, to be built in a special place for transmitting or broadcasting purposes.

[1] In grateful remembrance of a year spent in Munich as a Rockefeller-fellow.